E.N.S.I. CHIMIE CENTRE 1984

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE PARTIE

PREMIÈRE QUESTION

On rappelle qu'une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) si et seulement si elle admet des dérivées jusqu'à l'ordre k et sa dérivée d'ordre k est continue, la dérivée d'ordre 0 étant la fonction elle-même.

Soit E le plan affine réel euclidien orienté, et soit $\Gamma : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma(t) \in E$ une application de $\mathbb{R}$ dans E. On dit que Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ si et seulement si les coordonnées de $\Gamma(t)$ dans un repère de E sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de la variable t (cette propriété ne dépend pas du repère choisi). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant n \leqslant k$, le vecteur $\frac{d^n}{dt^n}\overrightarrow{O\Gamma}(t)$ ne dépend pas du point fixe O choisi, et nous le noterons $\frac{d^n\vec{\Gamma}}{dt^n}(t)$.

Nous supposerons désormais que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\frac{d\vec{\Gamma}}{dt}(t)$ ne s'annule pour aucune valeur de t. Soit γ la courbe de E, image de l'application Γ.

1° On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\sigma(t) = \int_0^t \left\| \frac{d\vec{\Gamma}}{du}(u) \right\| du$$

où $\left\| \frac{d\vec{\Gamma}}{du}(u) \right\|$ désigne la norme euclidienne de $\frac{d\vec{\Gamma}}{du}(u)$.

Par définition $\sigma(t)$ est l'abscisse curviligne du point de γ de paramètre t.

a. Montrer que σ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, de la variable réelle t. En déduire que son image est un intervalle ouvert $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. Montrer que la bijection réciproque $\sigma^{-1} :]a, b[\to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer σ lorsque $\left\| \frac{d\vec{\Gamma}}{dt}(t) \right\| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On dit alors que γ est paramétrée par une abscisse curviligne.

b. Montrer que l'application $\Gamma_0 = \Gamma \circ \sigma^{-1}$ de $]a, b[$ dans E est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\left\| \frac{d\vec{\Gamma}_0}{ds}(s) \right\| = 1$ pour tout $s \in]a, b[$. Si l'application Γ_0 est de classe $\mathcal{C}^k$, on dira que γ est une courbe de classe $\mathcal{C}^k$ de E.

2° On suppose que γ est de classe $\mathcal{C}^2$. Soient $\vec{T}(s) = \frac{d\vec{\Gamma}_0}{ds}(s)$ le vecteur unitaire tangent à γ au point d'abscisse curviligne s, et $\vec{N}(s)$ le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{T}(s)$ tel que $(\Gamma_0(s), \vec{T}(s), \vec{N}(s))$ soit un repère orthonormé direct de E.

a. Montrer qu'il existe une fonction K de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $s \in]a, b[$ on ait :

$$\frac{d\vec{T}}{ds}(s) = K(s)\,\vec{N}(s) \qquad \text{et} \qquad \frac{d\vec{N}}{ds}(s) = -K(s)\,\vec{T}(s)$$

Par définition $K(s)$ est la courbure de γ au point d'abscisse curviligne s.

b. Montrer que si γ est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 2$, alors K est de classe $\mathcal{C}^{k-2}$.

3° On suppose que γ est de classe $\mathcal{C}^3$. On dit que le point de γ d'abscisse curviligne s_0 est un *sommet* de γ si et seulement si $\frac{dK}{ds}(s_0) = 0$.

Déterminer les sommets des courbes paramétrées suivantes :

.../...

a. $x(t) = t^3$, $y(t) = t^3$

b. $x(t) = p \cos t$, $y(t) = q \sin t$, où p et q sont deux constantes réelles strictement positives distinctes.

4° Déterminer les courbes de classe $\mathcal{C}^3$ dont tous les points sont des sommets.

DEUXIÈME QUESTION

On suppose à présent que γ est une courbe de classe $\mathcal{C}^3$, fermée, de longueur L, paramétrée par une abscisse curviligne. Cela signifie que γ est l'image d'une application $\Gamma : s \in \mathbb{R} \to \Gamma(s) \in E$ de classe $\mathcal{C}^3$, périodique de période L, telle que $\left\| \frac{d\vec{\Gamma}}{ds}(s) \right\| = 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

1° Montrer que $K(s)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, périodique de période L. Montrer que si $K(s)$ n'est pas constante, elle atteint un maximum et un minimum sur tout intervalle d'une période.

En déduire que toute courbe fermée de classe $\mathcal{C}^3$ admet au moins deux sommets.

2° On suppose que, de plus, γ est *sans point double*, c'est-à-dire que la restriction de Γ à tout intervalle de la forme $[s_0, s_0 + L[$ est une bijection de cet intervalle sur γ, et *strictement convexe*, c'est-à-dire que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\gamma - \{\Gamma(s)\}$ est entièrement contenu dans l'un des deux demi-plans ouverts de E délimités par la tangente à γ en $\Gamma(s)$.

a. Soient $s_1 \in \mathbb{R}$ et $s_2 \in \mathbb{R}$ tels que $s_1 < s_2 < s_1 + L$. Alors, $A_1 = \Gamma(s_1)$ et $A_2 = \Gamma(s_2)$ sont deux points distincts de γ. Soit D la droite joignant les points A_1 et A_2. Montrer que tous les points de γ d'abscisse curviligne $s \in]s_1, s_2[$ appartiennent à l'un des deux demi-plans ouverts de E délimités par D et que tous ceux d'abscisse curviligne $s \in]s_2, s_1 + L[$ appartiennent à l'autre.

b. On suppose que $K(s)$ n'est pas constante. Soit $s_1 \in \mathbb{R}$ tel que $K(s)$ atteigne son minimum en s_1 et soit $s_2 \in]s_1, s_1 + L[$ tel que $K(s)$ atteigne son maximum en s_2. Les points $A_1 = \Gamma(s_1)$ et $A_2 = \Gamma(s_2)$ sont alors deux sommets distincts de γ.

Soit $\vec{i}$ un vecteur directeur unitaire de la droite D joignant A_1 à A_2, et soit $\vec{j}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{i}$.

Soient $x(s)$ et $y(s)$ les coordonnées de $\Gamma(s)$ dans le repère $(A_1, \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer en intégrant par parties et en utilisant les égalités de la question I, 2° *a.*, que l'on a :

$$(1) \qquad \int_{s_1}^{s_1 + L} \frac{dK}{ds}(s) \cdot y(s)\, ds = 0$$

c. On suppose que A_1 et A_2 sont les deux seuls sommets de γ, montrer que l'on a alors $\frac{dK}{ds}(s) > 0$ pour $s \in]s_1, s_2[$ et $\frac{dK}{ds}(s) < 0$ pour $s \in]s_2, s_1 + L[$. En décomposant l'intégrale de (1) en :

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{dK}{ds}(s) \cdot y(s)\, ds + \int_{s_2}^{s_1 + L} \frac{dK}{ds}(s) \cdot y(s)\, ds$$

montrer que cela est impossible et que par conséquent γ admet au moins trois sommets.

d. Supposons que γ n'admette en plus des sommets A_1 et A_2 ci-dessus, que le sommet $A_3 = \Gamma(s_3)$ avec $s_3 \in [s_1, s_1 + L[$. Montrer qu'alors $\frac{dK}{ds}$ s'annule en s_3 sans changer de signe.

En adaptant le raisonnement de la question précédente, en déduire que toute courbe fermée de classe $\mathcal{C}^3$ sans point double strictement convexe admet au moins quatre sommets.